Teorija: brojevi i algebra

Dakić, B., Elezović, N. (2009) *Matematika u 24 lekcije. Priručnik za prpremu državne mature: programi A i B.* Element, Zagreb.

Prirodni brojevi

Skup **prirodnih brojeva** označavamo s $\mathbf{N}$.

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n, \ldots\}.$$

Skup prirodnih brojeva zatvoren je s obzirom na zbrajanje i množenje.

Neka je $b > 1$ prirodan broj. Prirodni broj N zapisan u **pozicijskom sustavu s bazom** b ima vrijednost:

$$N = a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_{0(b)} = a_n \cdot b^n + a_{n-1} \cdot b^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot b + a_0.$$

Znamenke $a_0, a_1, \ldots, a_n$ cijeli su brojevi iz skupa $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$. Indeks označava u kojoj je bazi zapisan broj. U dekadskom sustavu brojeva je $b = 10$, u binarnom $b = 2$, u oktalnom $b = 8$, a u heksadecimalnom $b = 16$.

Svaka se dva prirodna broja m i n mogu usporediti prema veličini.

Neka je n po volji odabran prirodni broj. Onda je njegov sljedbenik prirodni broj $n+1$, a njegov prethodnik $n-1$.

Prirodni broj m djeljiv je prirodnim brojem n ako postoji prirodni broj p takav da je $m = n \cdot p$. Kažemo da je n **djelitelj** ili **mjera** od m i pišemo $n|m$.

Prirodni broj veći od 1 je **prost** ako je djeljiv samo s 1 i sa samim sobom. Broj je **složen** ako nije prost, s iznimkom broja 1 koji ne držimo ni prostim ni složenim. **Paran broj** je složen broj djeljiv s 2.

Svaki se prirodni broj može na jedinstven način napisati u obliku umnoška prostih brojeva:

$$n = p_1 p_2 \cdots p_m.$$

Cijeli brojevi

Operacija oduzimanja u skupu prirodnih brojeva ne može se uvijek definirati dovodi do proširenja skupa prirodnih brojeva na skup cijelih brojeva.

Skup **cijelih brojeva** označavamo sa $\mathbf{Z}$:

$$\mathbf{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Taj skup zatvoren je s obzirom na zbrajanje, oduzimanje i množenje. Dijeljenje s nu nije definirano.

Svojstva zbrajanja i množenja u skupu cijelih brojeva

- Zakon komutativnosti ili zamjene mjesta:

$$a + b = b + a; \qquad a \cdot b = b \cdot a.$$

- Zakon asocijativnosti:

$$a + (b + c) = (a + b) + c;$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$$

- Zakon distributivnosti množenja prema zbrajanju:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$$

- Za svaki cijeli broj a vrijedi:

$$a + 0 = a;$$
$$a \cdot 1 = a.$$

- Za svaki cijeli broj $a \neq 0$ postoji cijeli broj $-a$ tako da vrijedi:

$$a + (-a) = 0.$$

Broj $-a$ je **suprotni broj** broja a.

Racionalni brojevi

Nemogućnost potpunog definiranja operacije dijeljenja u skupu c zahtijeva uvođenje skupa racionalnih brojeva. Racionalni brojevi su kc brojeva. Skup **racionalnih brojeva** označavamo s $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : \quad m, n \in \mathbf{Z}, \quad n \neq 0 \right\}.$$

Svaki racionalni broj moguće je zapisati u obliku razlomka $\frac{m}{n}$, gdje je prirodni broj.

Skup racionalnih brojeva zatvoren je s obzirom na zbrajanje, oduzin nje i dijeljenje.

Uspoređivanje razlomaka

Razlomke jednakih nazivnika uspoređujemo poput prirodnih brojeva, njihove brojnike.

$$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}, \text{ ako je } a < b \qquad \frac{a}{c} > \frac{b}{c}, \text{ ako je } a > b.$$

Razlomke različitih nazivnika uspoređujemo svođenjem na zajednički n vajući tako razlomke jednakih nazivnika.

Jednakost razlomaka

Razlomci $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ jednaki su ako i samo ako je $a \cdot d = b \cdot c$.

Za svaki racionalni broj $\frac{a}{b}$ i svaki broj m različit od nule vrijedi:

$$\frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b}.$$

Čitamo li jednakost zdesna ulijevo, tada je riječ o **proširivanju razlomaka** $\frac{a}{b}$, a čitamo li je slijeva udesno, tada govorimo o **kraćenju razlomaka** $\frac{a\cdot m}{b\cdot m}$.

Svaki se racionalni broj može kraćenjem dovesti na oblik u kojem brojnik i nazivnik nemaju zajedničkih djelitelja.

Zbrajanje i oduzimanje racionalnih brojeva

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \qquad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

Razlomke koji nemaju zajednički nazivnik moramo proširiti kako bismo dobili razlomke jednakih nazivnika. Zajednički je nazivnik izraz koji sadrži faktore svih pojedinih nazivnika razlomaka koje zbrajamo ili oduzimamo.

Množenje i dijeljenje racionalnih brojeva

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \qquad \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Količnik dvaju razlomaka može se zapisati u obliku dvojnog razlomka:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}.$$

Pritom a i d nazivamo vanjskim, a b i c unutarnjim članovima dvojnog razlomka. Ovo pamtimo kao pravilo: **razlomci se dijele tako da se prvi razlomak pomnoži recipročnim razlomkom drugog.**

Svojstva zbrajanja i množenja u skupu racionalnih brojeva

- Komutativnost:
$$a+b=b+a;$$
$$a\cdot b=b\cdot a.$$
- Asocijativnost:
$$a+(b+c)=a+(b+c);$$
$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$$
- Distributivnost množenja prema zbrajanju:
$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c.$$
- Neutralni elementi (0 za zbrajanje, 1 za množenje):
$$a+0=a,$$
$$a\cdot 1=a.$$
- Za svaki racionalni broj $a\neq 0$ postoji njemu suprotni broj $-a$ i racionalan broj $\frac{1}{a}$ takav da vrijedi:
$$a+(-a)=0 \quad \text{i} \quad a\cdot\frac{1}{a}=1.$$

Broj $\frac{1}{a}$ **inverzni** je **broj** broja a.

Pravi razlomak je razlomak kojem je brojnik manji od nazivnika.

Mješoviti broj je zbroj $a+\frac{b}{c}$, prirodnog broja a i pravog razlomka $\frac{b}{c}$. Iz praktičnih se razloga zapisuje u obliku $a\frac{b}{c}$:

$$a\frac{b}{c}=a+\frac{b}{c}.$$

Realni brojevi

Brojevi koji nisu racionalni, tj. koje nije moguće predočiti kao količnike dvaju cijelih brojeva zovu se **iracionalni brojevi**.

Skup **racionalnih brojeva** označavamo s **I**.

Iracionalni brojevi su na primjer brojevi $\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt[3]{5}, \pi, e, \ldots$

Skup **realnih brojeva R** sastoji se od racionalnih i iracionalnih brojeva:

$$\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup\mathbf{I}.$$

Taj skup je zatvoren s obzirom na zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje.

Svojstva zbrajanja i množenja u skupu realnih brojeva

- Komutativnost:
$$a+b=b+a;$$
$$a\cdot b=b\cdot a.$$
- Asocijativnost:
$$a+(b+c)=a+(b+c);$$
$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c.$$